О численном построении аттракторов полудинамических систем

Корнев А.А.

Аннотация. В данной работе для полудинамических систем (ПДС) обладающих компактным аттрактором, хорошей функцией Ляпунова, конечным числом изолированных, возможно негиперболических, неподвижных точек, *явно* решается задача численного нахождения аттрактора с требуемой точностью.

В работе применяются новые результаты о структуре неустойчивых многообразий в окрестности негиперболической точки.

Введение.

К концу 40-х годов, в основном, была построена теория предельных множеств для ПДС в локально компактных пространствах. Первые результаты для ПДС действующих в нелокально компактных пространствах были получены в работах Дж. Хейла и его коллег [1] при исследовании ОДУ с запаздывающим аргументом. Приблизительно в это же время О.А. Ладыженская [2] для двумерных уравнений Навье-Стокса построила множество $\mathcal{M}$, равномерно притягивающее произвольное ограниченное подмножество B исходного пространства H. Была доказана минимальность данного множества среди всех, обладающих этим свойством, строгая инвариантность относительно разрешающего оператора задачи. Среди всех строго инвариантных подмножеств пространства, $\mathcal{M}$ является максимальным. Само $\mathcal{M}$ компактно и связно. На нем исходная полугруппа $S(t,h)$ продолжается до непрерывной группы. Каждая полная траектория из $\mathcal{M}$ определяется ее ортопроекцией на некоторое фиксированное конечномерное подпространство. Построенное множество было названо минимальным глобальным B–аттрактором ПДС. В настоящий момент $\mathcal{M}$ обычно называют [3] глобальным аттрактором.

Теория аттракторов эволюционных уравнений (теория глобальной устойчивости) формировалась в работах А.В. Бабина, М.И. Вишика [4], О.А. Ладыженской [5], Р. Темама [3] и их последователей. Полученные к настоящему моменту результаты охватывают весьма широкий класс задач математической физики.

Свойство компактности глобального аттрактора позволяет аппроксимировать его конечной ε-сетью с любой точностью. Имеется покрайней мере два подхода к построению такой аппроксимации. Первый подход основан на свойстве равномерного притяжения к аттрактору [6] произвольного ограниченного подмножества, второй – на возможности продолжить на $\mathcal{M}$ исходную ПДС до непрерывной группы [7]. В данной работе мы остановимся на первом подходе. Его суть заключается в численной реализации

известной формулы:
$$\mathcal{M}=\bigcap_{t\geq 0}[S(t,B)]_H$$
Несмотря на наличие соответствующих алгоритмов, (отметим существенную нетривиальность доказательства их сходимости) и огромное число картинок типа "странные аттракторы", сколько-нибудь строгие численные расчеты практически отсутсутвуют.

В первую очередь это связано с огромной вычислительной трудоемкостью данных задач – при построении ε-сети, например с $\varepsilon\equiv 10^{-2}$, аппроксимирующей аттрактор нам потребуется решить рассматриваемое нестационарное уравнение на некотором отрезке $[0,T]$ с порядка $(C\varepsilon)^{-N}$ различными начальними данными. При этом $C\ll 1$ а $N\gg 10^2$ совпадает с размерностью подпространства функций на котором ищется решение, в методе сеток для урчп – с количеством узлов сеток.

При этом отсутствует соответствующий математический аппарат обоснования "достоверности" полученных картинок, который, в некоторых случаях, можно было бы компенсировать дополнительными затратами. В связи с этим, например, для классических задач Чафе-Инфанта [12] и уравнений Лоренца отсутствуют численные эксперименты по построению аттрактора, хотя описанию его структуры уделено много места, и которая продолжает уточняться [11].

В данной работе рассматривается иная формулировка [8] проблемы аппроксимации аттрактора с требуемой точностью. С одной стороны она эквивалентна в некотором смысле [9] исходной, с другой – позволяет *явно* решить рассматриваемую задачу для некоторого класса ПДС.

Суть этого подхода заключается в использовании свойств функции скорости притяжения к аттрактору. Отметим, что существование функции скорости притяжения к аттрактору естественно следует из определения глобального аттрактора.

1. Аттракторы полудинамических систем.

Пусть H – Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\mathcal{T}$ – нетривиальная подгруппа аддитивной группы вещественных чисел R, $\mathcal{T}_+=\mathcal{T}\cap[0,+\infty[$ – полугруппа неотрицательных элементов из $\mathcal{T}$, и $S:H\times\mathcal{T}_+\to H$ – непрерывное по второму аргументу отображение, обладающее полугрупповым свойством
$$S(t_1,S(t_2,u))=S(t_1+t_2,u),\quad \forall t_1,t_2\in\mathcal{T}_+,\forall u\in H$$
Тройку $\{H,\mathcal{T}_+,S(\cdot)\}$ принято называть полудинамической системой (ПДС). При этом H есть пространство состояний системы, роль времени исполняет $\mathcal{T}_+$, а эволюция системы задается оператором $S(\cdot)$. Если $\mathcal{T}=R$, то речь идет о полудинамической системе с непрерывным временем.

Множество $B_a\subset H$ называется *B-притягивающим* множеством некоторой ПДС, если оно замкнуто и $dist(S(t,B),B_a)\to 0$ при $t\to\infty$ для любого ограниченного множества $B \subset H$.

$$dist(B, B_a) = \sup_{y \in B} \{dist(y, B_a)\}\,, \quad dist(y, B_a) = \inf_{x \in B_a} \|x - y\|$$

Минимальное B-притягивающее множество, если такое существует, называется глобальным аттрактором. В данной работе рассматриваются ПДС с компактным аттрактором. Глобальный аттрактор $\mathcal{M}$ – наибольшее строго инвариантное множество

$$S(t, \mathcal{M}) = \mathcal{M}, \quad t \geq 0,$$

притягивающее каждое ограниченное подмножество B.

Ограниченое множество B_a называется *поглощающим* множеством некоторой ПДС, если для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует такое время $T(B)$, что

$$S(t, B) \subset B_a, \quad \forall t \geq T,$$

т.е. любое B начиная с некоторого момента попадет в множество B_a и останется в нем навсегда. Если ПДС одладает таким поглощающим множеством, то ее аттрактор может быть найден по следующей формуле

$$\mathcal{M} = \bigcap_{t \geq 0} [S(t, B_a)]_H$$

Если H связно, то $\mathcal{M}$ связно. В случае когда полугруппа обладает глобальным аттрактором M, любая окрестность аттрактора является поглощающим множеством. Эти факты – следствие более сильных утверждений, доказанных в [5] (см. также [**?**]).

1.1 Полудинамические системы с параметром. Пусть разрешающий оператор исходной задачи $S(\cdot) = S_\lambda(\cdot)$ зависит от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda$. При этом $S(t, \cdot) \equiv S_{\lambda_0}(t, \cdot)$.

В данном разделе предпологаются выполнеными следующие условия (α):

1. Λ – некоторый метрический компакт с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ и λ_0 является неизолированной точкой Λ.

2. ПДС $\{H, \mathcal{T}_+, S_\lambda(\cdot)\}$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ имеет поглощающее множество B_λ и непустой аттрактор $\mathcal{M}_\lambda$.

3. Существует ограниченное поглощающее множество B_a, содержащее все B_λ.

Последовательность операторов $S_\lambda(\cdot)$, называется *асимптотически слабо сходящейся* в точке λ_0 на некотором ограниченном множестве B, если $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall T > 0$ существует δ такое, что в некоторой конечной точке $T_0 \geq T$ имеет место следующая оценка

$$\|S_\lambda(T_0, u) - S_{\lambda_0}(T_0, u)\| \leq \varepsilon \quad \forall \lambda \in O_\delta\left(\lambda_0\right),\ \forall u \in B$$

Если полугруппа обладает непустым аттрактором $\mathcal{M}_\lambda$, то любая замкнутая окрестность аттрактора $O_\varepsilon(\mathcal{M}_\lambda)$, является поглощающим множеством, т.е. $\forall\varepsilon > 0$ для произвольного ограниченного множества B существует время притяжения к аттрактору $T = T(\lambda, \varepsilon, B)$ такое, что $S_\lambda(t, u) \in O_\varepsilon(\mathcal{M}_\lambda)$ при $t \geq T, \forall u \in B$.

Будем считать, что известна функция (возрастающая) $\Theta(\lambda, \varepsilon, B_a)$, значение которой есть время притяжения поглощающего множества B_a к ε-окрестности аттрактора $\mathcal{M}_\lambda$. Далее нам так же потребуется обратная к ней функция $\Psi(\lambda, t, B_a)$, которую будем называть функцией *глобального притяжения* к аттрактору:

$$\operatorname{dist}(S_\lambda(t, B_a), \mathcal{M}_\lambda) \leq \Psi(\lambda, t, B_a), \quad t \geq 0.$$

Для полудинамических систем с компактным аттрактором можно аппроксимировать множество $\mathcal{M}$ последовательностью специально построенных [6] покрытий, сходящихся к нему в хаусдорфовой метрике. Однако, в этом случае отсутствуют явные оценки близости. В работе [8] для аппроксимации аттрактора $\mathcal{M}$ исходной полудинамической системы предлогалось рассмотреть множество $S_\lambda(T, B_a^\varepsilon)$. Здесь B_a^ε — некоторая ε–сеть поглощающего множества B_a:

$$B_a^\varepsilon = \{u_i \in B_a, i = 1, 2, ..., N_0 \mid \ \forall v \in B_a \ \exists i_0 : \ \|u_{i_0} - v\| \leq \varepsilon\}.$$

Из полученных результатов, в частности, следует следующее утверждение.

Пусть X — компактное метрическое пространство, в котором определены две полудинамические системы $\{X, \mathcal{T}_+, S_{\lambda_0}(\cdot)\}$ и $\{X, \mathcal{T}_+, S_\lambda(\cdot)\}$, разрешающие операторы которых в некоторый момент времени T удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|S_{\lambda_0}(T, u) - S_{\lambda_0}(T, v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \|S_{\lambda_0}(T, u) - S_\lambda(T, u)\| \leq \varepsilon \tag{1}$$

$$\forall u, v \in B_a.$$

Пусть $T \geq \Theta(\lambda_0, \varepsilon_1, B_a)$, т.е. за время T каждая траектория притягивается к ε_1-окрестности аттрактора $\mathcal{M}$:

$$S_{\lambda_0}(t, u) \subset O_{\varepsilon_1}(\mathcal{M}), \quad \forall t \geq T, \forall u \in B_a. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть операторы S_λ, S_{λ_0} удовлетворяют условиям* (1), (2). *Пусть множество $B_a^{\varepsilon_2}$ является конечной ε_2-сетью множества B_a. Тогда множество $B_1 = S_\lambda(T, B_a^{\varepsilon_2})$ удовлетворяет следующим вложениям:*

$$B_1 \subset O_{\varepsilon_1 + \varepsilon}(\mathcal{M}), \quad \mathcal{M} \subset O_{\varepsilon + L\varepsilon_2}(B_1)$$

Таким образом для слабо сходящихся операторов предложенный алгоритм позволяет аппроксимировать аттрактор задачи с требуемой точностью в хаусдорфовой метрике. Хотя данный результат является в большей степени теоретическим, так как требует нахождения образа для каждого элемента $B_a^{\varepsilon_2}$ в момент времени $T \gg 1$, он позволяет численно построить аппроксимации аттракторов модельных ПДС градиентного вида.

2. Построение функции глобального притяжения к аттрактору.

Далее в работе рассматриваются дискретные ПДС. При этом время задается полугруппой $\mathcal{T}_+ = \{nt_0, n \in \mathbf{N}_+\}$ с некоторым $t_0 > 0$, а разрешающий оператор задачи имеет вид $S(h) = S(t_0, h)$ так, что $S^k(h) = S(t_0 k, h)$. Отметим, что доказанные выше результаты стандартным образом [10] переносятся на случай дискретных ПДС.

Из определения $\mathcal{M}$ следует, что все неподвижные точки разрешающего оператора содержатся в аттракторе задачи. В работах [4], [5] и [10] рассмотрен класс ПДС для которого удается восстановить структуру аттрактора по произвольно малым окрестностям неподвижных точек.

Действительно, обозначим через $\mathcal{W}(S, \mathcal{O})$ неустойчивое многообразие подмножества $\mathcal{O}$ пространства H, т.н. "исходящий ус Адамара":

$$\mathcal{W}(S, \mathcal{O}) = \{u_0 \in \mathcal{O} : \exists u_k \in \mathcal{O}, u_k = S(u_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, ..\}$$

Тогда имеют место [5, 10] следующие утверждения:

Утверждение 1. *Пусть дискретная полугруппа* $\left\{S^k(\cdot), k \in N_+\right\}$ *на замкнутом подмножестве* B *Банахова пространства обладает компактным глобальным аттрактором* $\mathcal{M}$. *Тогда*

$$\mathcal{M} = \mathcal{W}(S, B)$$

Непрерывная функция $V : B \to R$ называется хорошей функцией Ляпунова для отображения S, если $V(S(h)) < V(h)\ \forall h \in B, t > 0$, если только $S(h) \neq h$.

Будем говорить, что аттрактор $\mathcal{M}$ некоторой ПДС имеет структуру *типа Морса-Смейла* если $\mathcal{M}$ представляет собой объединение множества точек покоя и всевозможных полных траекторий, их соединяющих. Следующая теорема содержит достаточные условия, при выполнении которых аттрактор имеет структуру данного типа.

Утверждение 2. *Пусть дискретная полугруппа* $\left\{S^k(\cdot), k \in N_+\right\}$ *на замкнутом подмножестве* B *Банахова пространства имеет хорошую функцию Ляпунова, компактный глобальный аттрактор* $\mathcal{M}$ *и множество неподвижных точек* $Z(S) = \left\{z_i : S(z_i) = z_i\right\}_{i=1}^N$ *разрешающего оператора конечно. Тогда каждая ограниченная последовательность* $u_{k+1} = S(u_k)$

сходится к некоторой неподвижной точке и для аттрактора имеет место следующее представление:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{z\in Z(S)} \bigcup_{k\in\mathbf{N}_+} S^k\left(\mathcal{W}(S,\mathcal{O}_z)\right)$$

где $\mathcal{O}_z$ являются сколь угодно малыми окрестностями точек z. Аттрактор состоит из множества точек покоя и всевозможных полных траекторий, их соединяющих.

Для рассмотренных ПДС можно построить [4, 5, 10] функцию глобального притяжения к аттрактору на базе информации о притяжении к аттрактору в сколь угодно малых окрестностях $\mathcal{O}_z$ неподвижных точек.

2.2 Глобальное притяжение к аттрактору. В работе [10] рассматривался алгоритм построения (с точностью до некоторого сдвига по времени) функции глобального притяжения к аттрактору при наличии локальных оценок в окрестности стационарных точек. Явные оценки можно получить при некоторых дополнительных предположениях.

Теорема 2. *Пусть дискретная полугруппа $\left\{H, \mathcal{T}_+, S^k(\cdot)\right\}$ на замкнутом подмножестве $\mathcal{O}$ Банахова пространства имеет хорошую функцию Ляпунова $V(\cdot)$, компактный глобальный аттрактор $\mathcal{M}$ и множество неподвижных точек $Z(S)$ полугруппы конечно и равно N.*

Пусть имеется набор замкнутых окрестностей $\mathcal{O}_i(z_i) \subset \mathcal{O}$, $1 \le i \le N$, для каждой из которых известна убывающая функция $\psi_i(n)$ притяжения к аттрактору $\mathcal{M}$, т.е. если $h \in \mathcal{O}_i$, то

$$\mathrm{dist}(S^n(h),\mathcal{M}) \le \psi_i(n), \quad \text{если } S^k(h) \in \mathcal{O}_i, \text{ при } 0 \le k \le n \tag{3}$$

При этом каждая полная траектория пересекает границу произвольной области $\mathcal{O}_i$ не более двух раз и имеет место следующая оценка:

$$\mathrm{dist}(z_i,\mathcal{O}_j) > |\mathcal{O}_i|L^2, \text{при } i \ne j,$$

здесь $|\mathcal{O}_i|$ – диаметр окрестности $\mathcal{O}_i$, L – константа Липшица отображения $S(\cdot)$. Определим в оставшейся подобласти $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}\setminus \bigcup_{i=0}^{N} \mathcal{O}_i$ функцию "притяжения" следующим образом $\psi_0(n) = L^n \mathrm{dist}(S^n(h),\mathcal{M})$.

Пусть для функции $V(\cdot)$ выполнены неравенства:

$$0 < v \le V(h) \le V, \quad \text{для произвольного } h \in \mathcal{O},$$
$$V\bigl(S(h)\bigr) \le qV(h), \quad q < 1, \quad \forall h \in \mathcal{O}_0 \tag{4}$$

Тогда для $n > 0$ имеет место следующая оценка глобальной скорости притяжения к аттрактору:

$$\mathrm{dist}(S^{n_0+n}(h_0),\mathcal{M}) \le \max\left\{|\mathcal{O}|, L^{n_0}\right\} \cdot \Psi([n/N]+1)$$

где $n_0 = [log_q(v/V)] + 1$, $\Psi(n) = \max_{1\le i\le N} \psi_i(n)$.

Доказательство теоремы может быть осуществлено методами работы [10]. Отметим только, что условие (4) позволяет оценить время n_0 пребывания траектории $\left\{S^k(h)\right\}_{k=0}^{\infty}$ в области $\mathcal{O}_0$.

Полученные результаты позволяют оценить функцию глобального притяжения к аттрактору для ПДС следующего вида:

$$S(h) = h - \tau f(h); \quad \tau = \mathrm{const} > 0,\ f(h) = \nabla F(h),\ h \in \mathbf{R}^n \tag{5}$$

которе можно рассматривать как явную апрроксимацию дифференциального уравнения $\dfrac{d}{dt}h(t) + \nabla F(h) = 0$ градиентного типа.

Пусть функция $f(h) : R^n \to R^n$ определена на некотором компакте $\mathcal{O} \in R^n$, принадлежит пространству $C^1(\mathcal{O})$

$$\max_{h\in\mathcal{O},i,j} |\frac{\partial f_i(h)}{\partial x_j}| = D_2, \quad \text{где } f_i(h) = \frac{\partial F(h)}{\partial x_i}$$

и имеет конечное число нулей:

$$Z(S) = \left\{ z_i \in \mathcal{O} : f(z_i) = 0 \right\}_{i=1}^{N}$$

Пусть для каждой точки $z_i \in Z(S)$ существует окрестность $\mathcal{O}_i$ в которой выполняются условия леммы 3, т.е. имеет место оценка (3). При этом в остальной части области $\mathcal{O}_0$ выполняется неравнество

$$\min_{h\in\mathcal{O}_0} \sum_{i=1}^{n} f_i^2(h) = D_1^2 > 0$$

Без ограничения общности будем также считать, что

$$0 < F_{min} \le F(h) \le F_{\max} \quad h \in \mathcal{O}$$

Тогда верна

Лемма 1. *Пусть для функции $f(h)$ выполнены сформулированные выше условия. Пусть $S(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Тогда при*

$$\tau D_2 n < 1, \quad \delta = \frac{\tau D_1^2 (1 - \tau D_2 n)}{F_{max}} < 1$$

функция $F(h)$ в области $\mathcal{O}_0$ является хорошей функцией Ляпунова отображения $S(h)$:

$$F\left(S(h)\right) \le qF(h),\ q = 1 - \delta.$$

Таким образом, для отображения (5) можно явно построить функцию глобального притяжения к аттрактору и, следовательно, аппроксимировать аттрактор с требуемой точностью.

References

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hale J.K., La Salle J.P., Slemrod M.*, Theory of a general class of dissipative process // J. Math. Anal. Appl. 1972. Vol. 39. p. 177-191.

[2] *Ладыженская О.А.* О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса // Зап.научн.сем.ЛОМИ. 1972. т.27. с.97-114.

[3] *Temam R.* Infinite dimensional system in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1998.

[4] *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

[5] *Ладыженская О.А.* О нахождении глобальных минимальных аттракторов для уравнений Навье-Стокса и некоторых других уравнений в частных производных // Усп. Матем. Наук. 1987. т.42. N.6. с.25-60.

[6] *Костин И.Н.*, Об одном способе аппроксимации аттракторов // Зап.научн.сем.ЛОМИ. 1991. т.188. с. 87-104.

[7] *Foias C., Jolly M.S., Kukavica I.*, Localization of attractors by their analytic properties // Nonlinearity. 9. 1996. p.1565-1581.

[8] *Корнев А.А.* К вопросу об аппроксимации полудинамических систем // Вестник МГУ. сер. матем. механика. 2000. N3. с.24-28.

[9] *Корнев А.А.* Об одном критерии аппроксимации аттракторов полудинамических систем // 1999. ДАН. т.369, N.5.

[10] *Kostin I.N.*, Rate of attraction to a non-hyperbolic attractor. Asymptotic Analysis 1998. 16. p.203-222.

[11] *Нитецки З.*, Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир. 1975.

[12] *M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub*, Invariant manifolds. Lectures notes in Math. vol. 583. Springer. Berlin. 1977.